ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2023-2024

TD 12 : Tables de caractères

Les exercices marqués d'un seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercice 1. (Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$)

1. Montrer que $\mathfrak{A}_4$ a 4 classes de conjugaison : l'identité, la classe de $(1\ 2\ 3)$, la classe de $(1\ 3\ 2)$, et les doubles transpositions.
2. Montrer que le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_4$ est le sous-groupe des doubles transpositions, et en déduire 3 caractères linéaires de $\mathfrak{A}_4$.
3. Déterminer la dimension de la dernière représentation irréductible de $\mathfrak{A}_4$ grâce aux propriétés de la représentation régulière.
4. En utilisant l'orthogonalité des colonnes, déterminer alors la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 2. (Table de caractères de D_8 et H_8)

On va calculer les tables de caractères des groupes D_8 et H_8.

1. On commence par le groupe D_8. On rappelle que D_8 est d'ordre 8, engendré par r d'ordre 4, et s d'ordre 2, et qu'ils vérifient $srs^{-1} = r^{-1}$.
   - **(a)** Donner les 5 classes de conjugaisons de D_8.
   - **(b)** Montrer que le groupe dérivé de D_8 est $\{1, r^2\}$.
   - **(c)** En déduire que D_8 a 4 caractères linéaires et le début de la table de caractères de D_8.
   - **(d)** En déduire que D_8 admet une représentation irréductible de degré 2, et la fin de la table de caractères de D_8.
     À quelle action géométrique correspond cette représentation irréductible de degré 2 ?
2. On passe au groupe H_8. On rappelle que $H_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$, que $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ et que $IJ = K$.
   - **(a)** Donner les 5 classes de conjugaisons de H_8.
   - **(b)** Montrer que le groupe dérivé de H_8 est $\{\pm 1\}$.
   - **(c)** En déduire que H_8 a 4 caractères linéaires et le début de la table de caractères de H_8.
   - **(d)** En déduire que H_8 admet une représentation irréductible de degré 2, et la fin de la table de caractères de H_8. À quel morphisme de groupe correspond cette représentation irréductible.
3. Que remarque-t-on ?
4. Calculer $\varepsilon_2(V) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2)$ pour les deux représentations irréductibles de degré 2 de D_8 et H_8.

Exercice 3. (Certaines propriétés des représentations de $\mathfrak{S}_n$)

Soit $n \geqslant 2$.

1. **(a)** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Justifier que σ et σ^{-1} sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.
   - **(b)** En déduire que la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs réelles.

Remarque : On peut même montrer que la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$ est toujours à valeurs entières mais cela nécessite des arguments de théorie des corps du cours d'Algèbre 2.

2. Soit H_n la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$ et ε la signature. Montrer que $\varepsilon \otimes H_n$ est isomorphe à H_n si et seulement si $n = 3$.

Exercice 4. (Un critère utile)
Soit G un groupe fini possédant un sous-groupe abélien d'indice m. Montrer que toute représentation irréductible de G est de degré inférieur ou égal à m.

Exercice 5. (Tables de caractères des groupes dihédraux)
Soit $n \geqslant 3$ un entier et soit D_{2n} le groupe dihédral d'ordre $2n$. Il est engendré par r d'ordre n, s d'ordre 2 tels que $srs^{-1} = r^{-1}$.

1. **(a)** Montrer que pour tout entier k, la classe de conjugaison de r^k est égale à $\{r^k, r^{-k}\}$.
   (b) Déduire que si n est pair, les rotations forment $\frac{n}{2}$ classes de conjugaisons, et que si n est impair, les rotations forment $\frac{n-1}{2}$ classes de conjugaisons.
   (c) Montrer que la classe de conjugaison de s est égale à $s\langle r^2\rangle$.
   (d) Déduire que si n est pair, les symétries forment 2 classes de conjugaisons, et que si n est impair, les symétries forment 1 classe de conjugaison.
2. **(a)** Montrer que le groupe dérivé de D_{2n} est égal à $\langle r^2\rangle$.
   (b) Montrer que quand n est pair ce groupe est cyclique d'ordre $\frac{n}{2}$ engendré par r^2, et quand n est impair, il est cyclique d'ordre n engendré par r.
   (c) En déduire que D_{2n} a 4 représentations irréductibles de degré 1 quand n est pair, et 2 quand n est impair.
3. **(a)** Montrer que pour tout entier k, on a une représentation ρ_k de degré 2 de D_{2n} telle que $\rho_k(r) = R_{\frac{2k\pi}{n}}$ et $\rho_k(s) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ (où R_θ est la matrice de rotation d'angle θ).
   (b) Montrer que ρ_k et ρ_ℓ sont isomorphe si et seulement si $k \equiv \pm\ell \pmod{n}$.
   (c) Montrer que ρ_k est réductible si et seulement si $k \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$.
4. En déduire toutes les représentations irréductibles de D_{2n} ainsi que leur caractère.

Exercice 6. (Table de caractères de $\mathfrak{S}_5$)

1. Donner l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ ainsi que leurs cardinaux.
2. Notons H la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$ et ε la signature. Montrer que H et $\varepsilon \otimes H$ ne sont pas isomorphes et en déduire 4 représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_5$ ainsi que leur caractères.

On note $V := H \otimes H$. On rappelle (voir DM) que $H \otimes H$ se décompose en deux sous-représentations :
$$H \otimes H = \mathrm{Sym}^2(H) \oplus \Lambda^2(H)$$
avec $\dim(\mathrm{Sym}^2(H)) = \dfrac{\dim(H)(\dim(H)+1)}{2}$ et $\dim(\Lambda^2(H)) = \dfrac{\dim(H)(\dim(H)-1)}{2}$. De plus, leurs caractères sont donnés par
$$\chi_{\mathrm{Sym}^2(H)}(g) = \frac{\chi_H(g)^2 + \chi_H(g^2)}{2} \quad \text{et} \quad \chi_{\Lambda^2(H)}(g) = \frac{\chi_H(g)^2 - \chi_H(g^2)}{2}.$$

3. Calculer le caractère de $\Lambda^2(H)$ et montrer qu'elle est irréductible.
4. **(a)** Calculer le caractère de $\mathrm{Sym}^2(H)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Sym}^2(H)$ se décompose en somme directe de trois sous-représentations irréductibles.

   (c) Montrer que l'on a $\mathrm{Sym}^2(H) \cong \mathbb{1} \oplus H \oplus W$ où W est une représentation de dimension 5.

5. Calculer le caractère de W, montrer que W n'est pas isomorphe à $\varepsilon \otimes W$ où ε est la signature puis donner la table des caractères de $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 7. (Table de caractères de $\mathfrak{A}_5$)

1. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ par conjugaison sur $\mathfrak{S}_n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, exprimer $\frac{\#\mathfrak{S}_n \cdot \sigma}{\#\mathfrak{A}_n \cdot \sigma}$ en fonction de $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ et $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$. En déduire que la classe de conjugaison de σ sous l'action de $\mathfrak{A}_n$ est soit égale à sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, soit est de cardinal moitié.

2. Montrer que les 5-cycles $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. En déduire que les 5-cycles forment deux classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_5$, alors que les autres types de permutations restent conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. Donner les 5 classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$, ainsi que leurs cardinaux.

3. En reprenant les notations de l'exercice précédent, montrer que la restriction de la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$ et de la représentation W sont des représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$.

4. Montrer que les deux dernières représentations irréductibles recherchées sont toutes les deux de dimension 3. On les note V_1 et V_2.

5. En utilisant l'orthogonalité des caractères, et l'irréductibilité de V_1 et V_2, finir la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 8. (Représentations induites)

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. Montrer qu'une représentation (V, ρ) du groupe G fournit une représentation de H. On l'appelle la *restriction* de (V, ρ), notée $\left(\mathrm{Res}_H^G V, \mathrm{Res}_H^G \rho\right)$.

On part maintenant d'une représentation (W, θ) de H et on va construire une représentation de G. On fixe $g_1, \dots, g_n$ un système de représentants du quotient G/H, et on suppose que $g_1 = 1$. On pose

$$V_{G/H} := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} e_{g_i} \quad \text{et} \quad V := V_{G/H} \otimes W,$$

et on fait agir le groupe G de la manière suivante : pour $g \in G$ et $i \in [\![1, n]\!]$, il existe une unique paire $(j(i), h) \in [\![1, n]\!] \times H$ telle que $g g_i = g_{j(i)} h$. Pour $w \in W$, on pose alors

$$\rho(g) \cdot (e_{g_i} \otimes w) := e_{j(i)} \otimes (\theta(h) w).$$

C'est la représentation l'*induite* de (W, θ) à G, notée $\left(\mathrm{Ind}_H^G W, \mathrm{Ind}_H^G \theta\right)$.

2. **(a)** Montrer que la définition ci-dessus fournit bien une représentation de G. Vérifier en particulier que l'action de g sur V est bien définie et est une action de groupes.

   (b) Soit $V_0 = e_1 \otimes W = \{e_1 \otimes w,\ w \in W\}$. Montrer que V_0 est stable par l'action de H et que la restriction de (V_0, ρ) à H est isomorphe en tant que représentations à (W, θ).

   (c) Montrer que pour $g \in G$, l'espace vectoriel $\rho(g) V_0$ ne dépend que de la classe de g dans G/H et que $V = \bigoplus_{\overline{g} \in G/H} \rho(g) V_0$.

   (d) Montrer que les propriétés des deux questions précédentes caractérisent l'induite de (W, θ) à isomorphisme près.

3. Montrer que pour toute représentation (V', ρ') de G, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V') \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G V')$ donné par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V') & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G V') \\ f & \longmapsto & (w \mapsto f(e_1 \otimes w)) \\ (e_{g_i} \otimes w \mapsto \rho'(g_i) f(w)) & \longleftarrow & f \end{array}$$

4. Soit (V', ρ') une représentation de G de caractère $\chi_{V'}$. On note $\mathrm{Ind}_H^G \chi_W$ le caractère de $(\mathrm{Ind}_H^G W, \mathrm{Ind}_H^G \theta)$ et $\mathrm{Res}_H^G \chi_{V'}$ le caractère de $(\mathrm{Res}_H^G V', \mathrm{Res}_H^G \rho')$. Déduire de la question précédente que

$$\langle \mathrm{Ind}_H^G \chi, \chi_{V'} \rangle = \langle \chi_W, \mathrm{Res}_H^G \chi_{V'} \rangle.$$

5. Montrer que le caractère de la représentation induite de (W, θ) est

$$\mathrm{Ind}_H^G \chi_W(g) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ g_i^{-1} g g_i \in H}} \chi_W(g_i^{-1} g g_i) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1} g x \in H}} \chi_W(x^{-1} g x).$$

Exercice 9. (Exemples de représentations induites)

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

(a) On suppose l'action transitive et pour $x_0 \in X$ fixé, on note H le stabilisateur de x_0. Montrer qu'on a un isomorphisme de représentations $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1} \cong V_X$.

(b) En déduire que pour toute représentation irréductible $W \in \mathcal{I}_G$, la multiplicité de W dans V_X est égal à $\dim\left(W^H\right)$. Autrement dit, la décomposition de V_X en représentations irréductibles est

$$V_X \cong \bigoplus_{W \in \mathcal{I}_G} W^{\dim\left(W^H\right)}.$$

(c) Énoncer et démontrer un résultat similaire dans le cas où l'action n'est plus transitive.

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On fixe $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine n-ième primitive de l'unité. Pour un entier k, on pose

$$\varphi_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \bar{\ell} & \longmapsto & \zeta^{k\ell} \end{array}.$$

On rappelle que les $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On pose $\rho_k : D_{2n} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ l'induite de φ_k à D_{2n} (on identifie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au sous-groupe de D_{2n} engendré par r). Montrer que les $(\rho_k)_{0<k<\frac{n}{2}}$ sont irréductibles et non isomorphes.

Exercice 10. (Sur les groupes d'ordre impair)

Soit G un groupe fini.

1. Montrer que le nombre de caractères irréductibles de G à valeurs réelles est égal au nombre de classes de conjugaison de G stable par inverse. (*Indication* : remarquer que $\langle \overline{\chi}, \chi \rangle$ vaut 0 ou 1 selon qui est à valeurs réelles ou non et utiliser l'orthogonalité des colonnes de la table de caractères).

2. Montrer que la table de caractères de G est réelle si et seulement si toutes les classes de conjugaisons de G sont stables par inverse.

3. Montrer que si G est d'ordre impair, alors il admet une unique classe de conjugaison stable par inverse.

4. En déduire que si G est d'ordre impair, la seule ligne réelle de sa table de caractère est celle du caractère trivial.

5. On admet que le degré des représentations irréductibles de G divise $\#G$. On Montrer que si G est d'ordre impair, alors $\#G$ est congru au nombre de classes de conjugaison de G modulo 16.